

Einführung von Differentialgleichungen unter besonderem Einsatz des CAS TI92 Plus - ein Unterrichtsversuch -



Ich habe zunächst eine anwendungsorientierte Problemstellung, bei der die Schüler/innen selbst eine Differentialgleichung entdecken können, gesucht. Ein Problem zu mathematisieren und dabei eine Differentialgleichung induktiv zu erschließen, halte ich für einen überaus wertvollen Zugang zum Thema. Zusätzlich entsteht eine hohe Ausgangsmotivation. Durch diesen Prozess wird das Bewusstsein für die Entstehung einer Differentialgleichung als Gleichung für eine unbekannte Funktion entwickelt. Am besten wäre ein Experiment, bei dem die Schüler/innen aktiv beteiligt werden können. Es sollte sich im Unterricht relativ schnell durchführen und mit einem CAS auswerten lassen. „Bierschaum“ baut sich nach dem allgemeinen Zerfallsgesetz ab. Dieses Experiment mit Bier habe ich für den Unterricht gewählt.

Je nach Anzahl der Schüler, können die Schüler den Versuch in Gruppenarbeit oder als gemeinsam durchgeführtes Experiment ausführen, die Daten im CAS darstellen und die Ergebnisse interpretieren. Ich habe mich für ein zentral von einer Schülergruppe durchgeführtes Demonstrationsexperiment entschieden. Benötigt werden zwei Flaschen Bier, ein Messzylinder und eine Stoppuhr. Ein Probeglas wurde eingeschenkt und uns wurde schnell klar, dass wir die Bierschaummenge kaum messen können. Was nun? Die Schüler kamen sehr schnell darauf, dass die Flüssigkeitsmenge zunimmt wenn die Schaummenge abnimmt und die Volumenzunahme sehr gut messbar ist (oder Höhe des Flüssigkeitsspiegels).

Wir erhielten folgende Daten (t in s und V in ml; Data Matrix Editor):

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	U	ΔU	c4	c5	
1	c1	c2	c3			
2	0.	75.	undef			
3	10.	90.	1.5			
4	20.	105.	1.5			
5	30.	125.	2.			
6	40.	140.	1.5			
7	50.	150.	1.			
8	60.	160.	1.			

c3=
MAIN RAD APPROX FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	U	ΔU	c4	c5	
7	c1	c2	c3			
8	60.	160.	1.			
9	70.	165.	.5			
10	80.	175.	1.			
11	90.	177.	.2			
12	100.	183.	.6			
13	110.	187.	.4			
14	120.	190.	.3			

r13c3= .3
MAIN RAD APPROX FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	U	ΔU	c4	c5	
13	c1	c2	c3			
14	120.	190.	.3			
15	130.	195.	.5			
16	140.	196.	.1			
17	150.	200.	.4			
18	160.	202.	.2			
19	170.	204.	.2			
20	180.	205.	.1			

r19c3= .1
MAIN RAD APPROX FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	U	ΔU	c4	c5	
19	c1	c2	c3			
20	180.	205.	.1			
21	190.	207.	.2			
22	200.	210.	.3			
23	210.	210.	0.			
24	220.	210.	0.			
25	230.	211.	.1			
26	240.	212.	.2			

r25c3= .2
MAIN RAD APPROX FUNC

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	U	ΔU				
	c1	c2	c3	c4	c5		
25	240.	212.	.2				
26	250.	214.	.2				
27	260.	215.	.1				
28	270.	215.	0.				
29	280.	215.	0.				
30	290.	216.	.1				
31	300.	218.	.2				

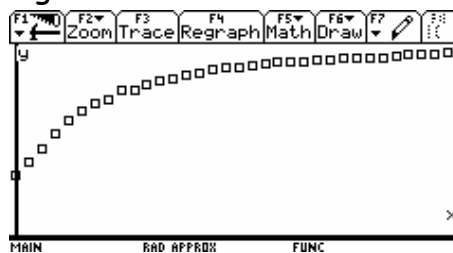
r31c3=.2

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	t	U	ΔU				
	c1	c2	c3	c4	c5		
29	280.	215.	0.				
30	290.	216.	.1				
31	300.	218.	.2				
32	310.	218.5	.05				
33	320.	219.5	.1				
34	330.	220.	.05				
35							

r29c3=0.

Die graphische Darstellung der Messwerte wurde anschließen sofort von einem Schüler am OHP (entsprechender Aufsatz sollte vorhanden sein) präsentiert.

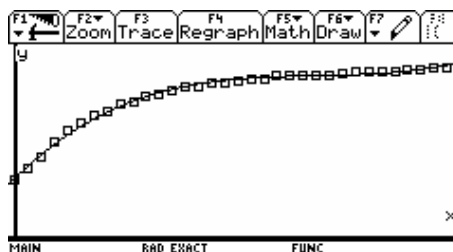
Wir erhielten folgende Darstellung:



Gesucht war nun der funktionale Zusammenhang.

Die Schüler begannen sofort zu experimentieren und die verschiedensten Regressionsmöglichkeiten des CAS auszuprobieren. Angeregte Diskussionen waren die Folge. Die kubische Regression wurde zunächst als beste Möglichkeit (Modell) der Beschreibung gewählt.

Ergebnisse:

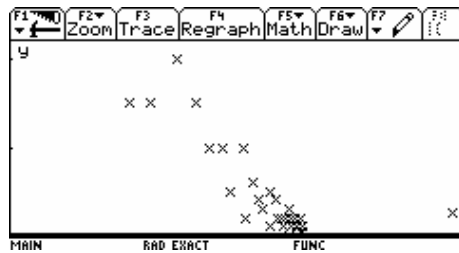


Leider entsprach das Grenzverhalten der gefundenen Funktion (Überprüfung mit dem TI92) nicht der Realität. Was nun?

Der Anfangswert für das Volumen zur Zeit $t = 0$ s stand fest: $V(0) = 0 \text{ ml}$. Allen Schüler/innen war klar, dass am Anfang die Biermenge V schnell ansteigt und am Ende nur noch langsam. Sie nähert sich offensichtlich einem Grenzwert (abgestandenes Bier). Was bedeutet „steigt schnell an“ bzw. „steigt langsam an“? Es wurde den Schüler/innen

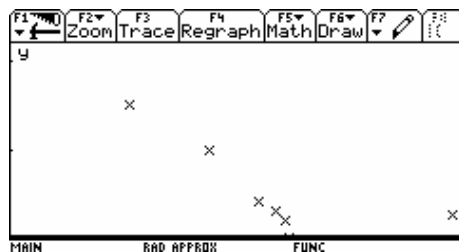
auch an dieser Stelle im Unterricht schnell klar, dass das Änderungsverhalten durch die erste Ableitung V' ausgedrückt werden kann. Wie lassen sich Zusammenhänge entdecken? Gibt es einen Zusammenhang zwischen der gesuchten Funktion V und der Funktion, die die Änderung von V beschreibt?

Wir haben nun das mittlere Änderungsverhalten (3. Spalte ΔV in der Tabelle) bestimmt und ΔV in Abhängigkeit von V mit dem CAS graphisch dargestellt. Wir erhielten folgendes Ergebnis:

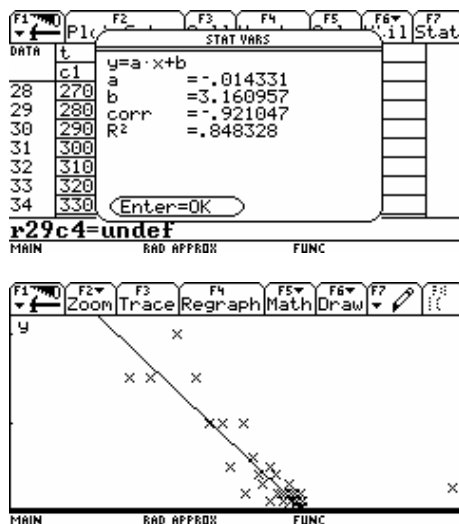


An diesem Graph ließ sich nichts Eindeutiges erkennen. Wiederum entstand eine rege Diskussion unter den Schülern. Warum lagen die Werte so unregelmäßig? Die Schüler/innen hatten einen etwa geraden Verlauf erwartet. An dieser Stelle war erkennbar, dass bei der Abnahme der Schaummenge ein statistischer Prozess vorliegt, so dass dieser Verlauf der Kurve erklärbar wurde. Vergrößert man das Zeitintervall bei der Messung, erhält man zwar weniger Messwerte, aber die Werte liegen in etwa auf einer Geraden.

Ergebnis:



Für die Schüler/innen war nun klar das zwischen V' und V ein linearer Zusammenhang besteht. Wir haben dann im Unterricht beschlossen doch alle Werte zu benutzen und die Werte mit Hilfe des CAS durch eine Gerade approximiert. Wir erhielten folgendes Ergebnis:



Der TI92 lieferte die entsprechende Gleichung: $y = -0,014331 * x + 3,160957$ also:

$$V'(t) = -0,014331 * V(t) + 3,160957$$

Damit wurde von den Schüler/innen eine Gleichung gefunden, die eine Funktion und ihre Ableitung enthält. An dieser Stelle habe ich die Begriffe "Differentialgleichung" und „beschränkte Wachstum“ eingeführt und den Kurs wieder nach einer Idee für $V(t)$ gefragt. An dieser Stelle konnten die Schüler/innen ihre Kenntnisse über die e-Funktion einbringen. Mit Hilfe des CAS (expReg) konnten Sie auch eine Gleichung finden. Sie passte aber nicht. Was nun? Wie können wir diese Gleichung lösen? Interessiert? Wählt in der Sek. II den Matheleistungskurs und ihr werdet es erfahren.....

M. Reuß